BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** **2008**

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА ПО НЕПРЕРЫВНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

Р.А.СУЛЕЙМАНОВА
Бакинский Государственный Университет

В этой работе рассмотрены методы оценивания неизвестных параметров в моделях диффузионного типа для непрерывных и дискретных наблюдений. Предполагается, что оцениваемые параметры входят в модель линейно. Для процессов, которые наблюдаются непрерывно, применяется метод максимального правдоподобия, в результате чего получаются состоятельные и асимптотически нормальные оценки параметров.

В большинстве случаев для дискретных наблюдений нет точных выражений для функции максимального правдоподобия, а использование приближенной функции правдоподобия ведет к несостоятельным оценкам. (см.[1], [2]). Для диффузионных процессов, наблюдаемых дискретно и описанных стохастическим дифференциальным уравнением, здесь исследованы мартингальные методы оценивания параметров [1], [2], основанные на аппроксимации функции правдоподобия.

Рассмотрим диффузионный процесс в общем виде

$$dX_t = f(X_t;\ \theta)dt + g(X_t)dW_t, \quad t \ge 0, \quad X_0 = x_0 > 0,$$

где $f(X_t;\theta)$ – коэффициент сноса, $g(X_t)$ – коэффициент диффузии, $\theta = (\theta_1,...,\theta)^T$ – вектор параметров, которые надо оценить (индекс T означает транспонирование), $W_t, t \ge 0$,– стандартный винеровский процесс.

Пространство состояний рассматриваемого случайного процесса часто бывает ограничено каким-либо подмножеством вещественной прямой, обычно подмножеством неотрицательных вещественных чисел. Установлено [3], что пространство состояний диффузионного процесса может иметь недостижимые границы, которые определяются функциями $f(X_t,\theta)$ и $g(X_t)$. Недостижимые границы бывают двух типов: естественные и притягивающие.

Поведение диффузионного процесса вблизи недостижимой границы, обозначим ее b_1, сводится к следующему. Пусть процесс X_t находится при $t=0$ в состоянии $x_0 \in (b_1,\beta)$, где β – точка вблизи границы, а x_0 – начальное условие. Он либо покидает интервал (b_1,β), за конечное время, причем всегда через правую точку, либо никогда не покидает этот интервал и тогда $X_t \to b_1$ при $t \to \infty$. Такая граница называется притягивающей [3].

Граница b_1 называется естественной [3], если X_t с вероятностью 1 достигает точки β раньше, чем границы b_1. Отсюда следует, что X_t никогда не достигнет границы: если процесс X_t возвращается в интервал (b_1, β), то с вероятностью 1 достигнет точки β еще раз раньше, чем границы b_1.

Таким образом, естественные границы характеризуются тем, что, даже если $t \to \infty$, они достижимы лишь с нулевой вероятностью.

Классификация границ в пространстве состояний диффузионного процесса основана на интегрируемости функций, составленных из коэффициентов сноса $f(X_t, \theta)$ и диффузии $g(X_t)$. Введем функцию

$$\phi(x) = \exp\left(-\int_{\beta}^{x} \frac{2f(z;\theta)}{g^2(z)} dz \right).$$

Граница b_1 – естественная тогда и только тогда, когда функция

$$L(b_1) = \int_{b_1}^{\beta} \phi(x) dx$$

неинтегрируемая в окрестности границы b_1 ([3], [4]).

Пусть(Ω, F,P) - вероятностное пространство, на котором задан процесс диффузионного типа со стохастическим дифференциалом

$$dX_t = (a + bX_t)dt + X_t dW_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = x_0 > 0, \tag{1}$$

где a,b – неизвестные параметры, а W_t-стандартный винеровский процесс.

Покажем, что при $a > 0, -\infty < b < \infty$, $b_1 = 0$ является недостижимой границей естественного типа пространства состояний диффузионного процесса (1).

Докажем лемму, которая нам понадобится при оценивании параметров диффузионного процесса и исследовании асимптотических свойств.

Лемма 1. *Пусть диффузионный процесс задан уравнением (1),* $a > 0$, $-\infty < b < \infty$, *и при* $t = 0$ *находится в состоянии* $X_0 = x_0 > 0$, $x_0 \in (0, \beta)$, $\beta > 0$.

Тогда $b_1 = 0$ *является недостижимой границей естественного типа.*

Доказательство. Вычислим функцию $L(b_1)$ для дифференциального стохастического уравнения (1). Имеем

$$\phi(x) = exp\left(-\int_{\beta}^{x} \frac{2(a + bz)}{z^2} dz \right) = \frac{exp\left(\frac{2a}{x}\right)}{x^{2b}} \cdot exp\left(-\frac{2a}{\beta} \right) \cdot \beta^{2b}.$$

Тогда

$$L(b_1) = \exp\left(-\frac{2a}{\beta}\right) \cdot \beta^{2b} \int_{b_1}^{\beta} \frac{\exp\left(\frac{2a}{x}\right)}{x^{2b}} dx.$$

Из последнего выражения следует, что при $b_1 = 0$ интеграл $L(0)$ расходится при $a > 0$ Это означает, что граница $b_1 = 0$ является недостижимой границей естественного типа пространства состояний стохастического дифференциального уравнения (1).

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть, диффузионный процесс* X_t*, заданный в (1), при* $t = 0$ *находится в состоянии* $X_0 = x_0 > 0,\ x_0 \in (0, \beta)$.

Тогда диффузионный процесс (1), при $a > 0,\ -\infty < b < \infty$, *достигает границы* $b_1 = 0$ *с нулевой вероятностью, т.е.*

$$P_a\left\{\inf_{0 \le t < \infty} X_t = 0\right\} = 0.$$

Необходимо оценить неизвестные параметры a и b по непрерывным наблюдениям диффузионного процесса (1), заданном на отрезке $0 \le t \le T$. Запишем функцию правдоподобия [2], [5] для стохастического дифференциального уравнения (1):

$$L_t^{(a,b)} = \exp\left[\int_0^T \frac{(a + bX_s)dX_s}{X_s^2} - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(a + bX_s)^2 ds}{X_s^2}\right]. \quad (2)$$

Функция правдоподобия (2) существует в силу леммы 1 для диффузионного процесса (1), так как $b_1 = 0$ является недостижимой границей естественного типа пространства его состояний при $a > 0,\ -\infty < b < \infty,\ X_0 = x_0 > 0$.

Теорема 1. *Пусть случайный процесс* $X = (X_t, F_t),\ 0 \le t \le T$, *удовлетворяет уравнению (1) при* $a > 0,\ -\infty < b < \infty$, *и находится в состоянии* $X_0 = x_0 > 0$, *а* $W_s,\ s \ge 0$, *– стандартный винеровский процесс.*

Тогда оценки максимального правдоподобия коэффициентов a и b выражаются следующим образом:

a) при известном коэффициенте b

$$\hat{a}_T = a + \frac{\int_0^T \frac{dW_s}{X_s}}{\int_0^T \frac{ds}{X_s^2}}, \quad (3)$$

b) при известном коэффициенте a

$$\hat{b}_T = b + \frac{W_T}{T}, \quad (4)$$

c) при неизвестных коэффициентах a и b

$$\hat{a}_T = \frac{T\int_0^T \frac{dX_s}{X_s^2} - \int_0^T \frac{dX_s}{X_s}\int_0^T \frac{ds}{X_s}}{\int_0^T \frac{ds}{X_s^2} - \left(\int_0^T \frac{ds}{X_s}\right)}, \qquad \hat{b}_T = \frac{T\int_0^T \frac{dX_t}{X_t}\int_0^T \frac{ds}{X_s^2} - \int_0^T \frac{dX_t}{X_t^2}\int_0^T \frac{ds}{X_s}}{T\int_0^T \frac{ds}{X_s^2} - \left(\int_0^T \frac{ds}{X_s}\right)}. \quad (5)$$

Доказательство. Дифференцируя логарифм функции правдоподобия, заданной выражением (2), по неизвестному параметру a, получим уравнение:

$$\frac{\partial \ln L(T)}{\partial a} = \left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{(a+bX_s)}{X_s^2}\right)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{(a+bX_s)^2}{X_s^2}\right)ds\right] =$$

$$= \int_0^T \frac{dX_s}{X_s^2} - \int_0^T \frac{(a+bX_s)}{X_s^2}ds = 0.$$

Решая это уравнение, получаем оценку максимального правдоподобия $\hat{a}_T$ для параметра a, она равна

$$\hat{a}_T = \frac{\int_0^T \frac{dX_s}{X_s^2} - b\int_0^T \frac{ds}{X_s}}{\int_0^T \frac{ds}{X_s^2}}, \qquad (6)$$

если параметр b известен. Используя (1), преобразуем числитель (6) следующим образом:

$$\int_0^T \frac{dX_s}{X_s^2} - \int_0^T \frac{bX_s ds}{X_s^2} = \int_0^T \frac{ads}{X_s^2} + \int_0^T \frac{X_s dW_s}{X_s^2} = a\int_0^T \frac{ds}{X_s^2} + \int_0^T \frac{dW_s}{X_s}.$$

Из последнего выражения и (6) следует утверждение (3) теоремы.

Аналогично находим оценку максимального правдоподобия $\hat{b}_T$ для параметра b, когда известен коэффициент a. Дифференцируя $\ln L_T^{(a,b)}$ по неизвестному параметру b, получим уравнение

$$\frac{\partial \ln L(T)}{\partial b} = \left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{(a+bX_s)}{X_s^2}\right)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{(a+bX_s)^2}{X_s^2}\right)ds\right] =$$

$$= \int_0^T \frac{X_s dX_s}{X_s^2} - \int_0^T \frac{X_s(a+bX_s)}{X_s^2}ds = \int_0^T \frac{dX_s}{X_s} - \int_0^T \frac{a+bX_s}{X_s}ds = 0.$$

Преобразуем последнее выражение следующим образом:

$$\int_0^T \frac{dX_s}{X_s} - a\int_0^T \frac{ds}{X_s} - Tb_T = 0,$$

тогда

$$\hat{b}_T = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dX_s}{X_s} - a\frac{1}{T}\int_0^T \frac{ds}{X_s}.$$

Из уравнения (1) выразим $dX_s - ads = bX_s ds + X_s dW_s$, тогда:

$$\hat{b}_T = b + \frac{1}{T}\int_0^T dW_s$$

Из последнего выражения следует утверждение (4) теоремы.

Аналогично получаем выражения оценок (5), если неизвестны параметры a и b.

Теорема доказана.

Замечание. *Оценка максимального правдоподобия* $\hat{b}_T$ (4) *при известном коэффициенте а имеет нормальное распределение,*

$$P\left\{\left(\hat{b}_T - b\right) < x\right\} \sim \mathrm{N}\ (0,1),$$

для любого T.

В заключение этого пункта приведем примеры решения стохастических дифференциальных уравнений, которые позволят устанавливать по теореме сравнения [8] положительность решений некоторых стохастических дифференциальных уравнений.

Теорема 2.*Пусть на вероятностном пространстве (*Ω,F,P) *задан случайный процесс диффузионного типа* Y_t.

Тогда имеют место следующие стохастические дифференциалы типа Y_t:

1) $dY_t = a(t)Y_t dW_t$, $\quad Y_0 = y_0 > 0$, (7)

если $a(t)$ – интегрируемая в квадрате функция, а

$$Y_t = y_0 \cdot \exp\left\{\int_0^t a(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s)ds\right\}, \quad t \ge 0;$$

2) $dY_t = Y_t dW_t$, $\quad Y_0 = y_0 > 0$, (8)

если $\quad Y_t = y_0 \cdot \exp\left\{W_t - \frac{t}{2}\right\}, \quad t \ge 0;$

3) если $dY_t = Y_t dt + Y_t dW_t$, $\quad Y_0 = y_0 > 0$, (9)

$$Y_t = y_0 \cdot \exp\left\{W_t + \frac{t}{2}\right\}; \quad t \ge 0.$$

4) $dY_t = aY_t dt + bY_t dW_t$, $Y_0 = y_0$, (10)

если $a > 0,\ b > 0$, а

$$Y_t = e^{at}\left\{y_0 + b\int_0^t e^{-as}dW_s\right\},$$

где W_t – стандартный винеровский процесс.

Доказательство.

1) Обозначим

$$Z_t = \int_0^t a(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s)ds,$$

тогда

$$Y_0 = y_0 \cdot e^{Z_t}, \quad dZ_t = a(t)dW_t - \frac{1}{2}a^2(t)dt.$$

Чтобы применить формулу замены переменных Ито [3], [5] (с.136) вычислим производные функции $f(t, Z_t) = y_0 \cdot \exp Z_t$:

$$f_t'(t, Z_t) = 0, \; f_{Z_t}'(t, Z_t) = y_0 \cdot \exp Z_t \qquad f_{Z_t Z_t}''(t, Z_t) = y_0 \cdot \exp Z_t .$$

Отсюда по формуле Ито [3], [5] (с.136) получаем

$$dY_t = \left[-\frac{y_0 \cdot e^{Z_t} a^2(t)}{2} + \frac{y_0 \cdot e^{Z_t} a^2(t)}{2} \right] dt + y_0 \cdot \exp Z_t$$

$$a(t)dW_t = a(t)Y_t dW_t .$$

Отсюда следует утверждение (7) пункта 1 теоремы.

2) Обозначим

$$Z_t = W_t - \frac{t}{2},$$

тогда

$$Y_t = y_0 \exp Z_t , \; dZ_t = -\frac{1}{2}dt + dW_t .$$

Чтобы применить формулу замены переменных Ито [3], [5] (с.136) вычислим производные функции $f(t, Z_t) = y_0 \cdot \exp Z_t$:

$$f_t'(t, Z_t) = 0, \quad f_t'(t, Z_t) = y_0 \cdot \exp Z_t , \quad f_{Z_t Z_t}''(t, Z_t) = y_0 \cdot \exp Z_t .$$

Отсюда по формуле Ито [3], [5] (с.136) получаем

$$dY_t = \left[-\frac{y_0 \cdot e^{Z_t}}{2} + \frac{y_0 \cdot e^{Z_t}}{2} \right] dt + y_0 \cdot (\exp Z_t) \quad dW_t = Y_t dW_t .$$

Отсюда следует утверждение (8) пункта 2 теоремы.

3) Обозначим

$$Z_t = W_t - \frac{t}{2},$$

тогда

$$Y_t = y_0 \cdot \exp Z_t \quad dZ_t = -\frac{1}{2}dt + dW_t .$$

Чтобы применить формулу замены переменных Ито [3], [5] (с.136) вычислим производные функции $f(t, Z_t) = y_0 \cdot \exp Z_t$:

$$f_t'(t, Z_t) = 0, \quad f_{Z_t}'(t, Z_t) = y_0 \cdot \exp Z_t , \quad f_{Z_t Z_t}''(t, Z_t) = y_0 \cdot \exp Z_t .$$

Отсюда по формуле Ито [3], [5] (с.136) получаем

$$dY_t = \left[-\frac{y_0 \cdot e^{Z_t}}{2} + \frac{y_0 \cdot e^{Z_t}}{2} \right] dt + y_0 \cdot (\exp Z_t)\ \ dW_t = Y_t dW_t .$$

Отсюда следует утверждение (9) пункта 3 теоремы.

4) Обозначим

$$Z_t = y_0 + b Z_t = y_0 + b \int_0^t e^{-as} dW_s$$

тогда

$$Y_t = e^{at} Z_t, \qquad dZ_t = b e^{-at} dW_t .$$

Чтобы применить формулу замены переменных Ито [1.4.2], [3], [5] (с.136) вычислим производные функции $f(t, Z_t) = e^{at} Z_t$:

$$f_t'(t, Z_t) = a e^{at} Z_t, \qquad f_{Z_t}'(t, Z_t) = a e^{at}, \qquad f_{Z_t Z_t}''(t, Z_t) = 0 .$$

Отсюда по формуле Ито [3], [5] (с.136), используя $dZ_t = b e^{at} dW_t$, получаем

$$dY_t = e^{at} Z_t dt + b e^{at} e^{-at} dW_t = a Y_t dt + b dW_t .$$

Отсюда следует утверждение (10) пункта 4 теоремы.

Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что если задан случайный процесс, то формула Ито [5] позволяет найти стохастический дифференциал. Можно рассматривать и обратную задачу, в которой задан стохастический дифференциал, а случайный процесс, являющейся его решением, надо найти.

Замечание. Решения $Y_t = y_0 \cdot \exp\left\{ W_t - \frac{t}{2} \right\}$ стохастического дифференциального уравнения

$$dY_t = Y_t dW_t, \quad Y_0 = y_0 > 0, \ \ t \ge 0,$$

являются положительными. Этот результат позволяет доказать положительность решений, на пример, стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = a dt + X_t dW_t, \quad X_0 = x_0 > 0, \quad t \ge 0,$$

при $a > 0$ по теореме сравнения [8].

Однако, теорема сравнения [8] не позволяет установить тип границ (или границы) пространства состояний диффузионного процесса и вычислить их (ее) точное значение.

Результаты теоремы 2 можно расширить и применять для исследования решений других стохастических дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bibby B.M. and Sorensen N. Martinqale Estimation funktions for discretely observed diffusion prosses, Bernoulli. 1995. vol.1, № (1/2), P.17-39.
2. Going ANJA. Estimation in Fineancical Models. ETH zurich. De partment of Math. CH-8092, Zurich – Switzelland. 1995.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, Наукова дмка. 1968.
4. Хорстемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
5. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
6. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука 1989.
7. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория Мартингалов. М.: Наука. 1986.
8. Скороход А.В. Исследование по теории случайных процессов. Киев, Изд. КГУ, 1961 г.
9. Ширяев А.Н. Вероятность, статистика, случайные процессы. I, М., Изд. МГУ. 1972.
10. Glodambl V.P. and Heyde C.C. «Quasi – likehood and Optimal Estimations». Jnt. Statistic Reviewiew 1987.55, п.231-244.

DİFFUZİON PROSESİN PARAMETRLƏRİNİN KƏSİLMƏZ MÜŞAHİDƏLƏR ƏSASINDA QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

R.A.SÜLEYMANOVA

XÜLASƏ

Məqalədə diffuzion proseslər üçün naməlum parametrlərin кəsilməz aparılan müşahidələr əsasında qiymətlənmələri tapılır. Xüsusi halda, işdə naməlum *a* və *b* parametrləri üçün maкsimal həqiqətə yaxınlıq qiymətlənmələri tapılmışdır.

ESTIMATES OF PARAMETER OF DIFFUZION PROSSES ON CONTINUOUS OBSERVATIONS

R.A.SULEYMANOVA

SUMMARY

In this work the methods of estimations of unknown parameters in modes of diffusion type for the continuous and discrete abservatiousare considered. Jt is assumed that the estimated parameters belong to the model linearly.

For the proses which is observated by continuously is applied the method of maximal probability in result which the comfortable and asymptotic normal estimations of parameters are received.